

אנליזה מתמטית

פרק 21 - ערכים עצמיים-וקטורים עצמיים-לכסון מטריצות - דימיון

תוכן העניינים

1. לכסון מטריצות - תרגילי חישוב.....1

לכסון מטריצות – תרגילי חישוב

שאלות

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 1-4:

- מצאו מטריצה אופיינית.
- מצאו פולינום אופייני.
- מצאו ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.
- מצאו מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.
- מצאו וקטורים עצמיים.
- קבעו האם המטריצה ניתנת ללכסון.
- במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה.
- כלומר, מצאו מטריצה הפיכה P , כך ש- $P^{-1}AP = D$, באשר D מטריצה אלכסונית.
- במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, חשבו A^{2009} .
- מצאו את הפולינום המינימלי.
- קבעו האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים.
- במידה והמטריצה הפיכה, בטאו את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד, תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

- עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 5-6 מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים.
- במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה.
- כלומר, מצאו מטריצה הפיכה P , כך ש- $P^{-1}AP = D$, כאשר D מטריצה אלכסונית.
- פתרו פעם מעל $\mathbb{C}$ ופעם מעל $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 7-11 מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

(12) תהי A מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3 .

ידוע כי הווקטורים העצמיים של המטריצה הם $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

והם מתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -4$.

מצאו את המטריצה A .

(13) קבעו האם קיימת מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3 ,

בעלת וקטורים עצמיים $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

המתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

במידה וקיימת מטריצה כזאת, מצאו אותה.

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א.} \begin{bmatrix} x & -2 & 1 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & -1 & x \end{bmatrix} \quad \text{ב.} \quad p(x) = x(x-1)^2 \quad \text{ג.} \quad x=0, x=1$$

הריבוב האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוב האלגברי של $x=0$ הוא 1.

ד. $V_{x=1} = sp\{\langle 1, 1, 1 \rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי : 1.

$V_{x=0} = sp\{\langle 1, 0, 0 \rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי : 1.

ה. $\langle 1, 1, 1 \rangle, \langle 1, 0, 0 \rangle$ – ו-ח. לא ניתנת.

ט. $m(x) = x(x-1)^2 \quad \deg = 3$ – הפולינום האופייני הוא גם הפולינום המינימלי.
י. לא הפיכה.

$$(2) \quad \text{א.} \begin{bmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{bmatrix} \quad \text{ב.} \quad p(x) = (x-1)^2(x-2) \quad \text{ג.} \quad x=1, x=2$$

הריבוב האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוב האלגברי של $x=2$ הוא 1.

ד. $V_{x=1} = sp\{\langle 1, 0, 0 \rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי : 1.

$V_{x=2} = sp\{\langle 0, 0, 1 \rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי : 1.

ה. $\langle 0, 0, 1 \rangle, \langle 1, 0, 0 \rangle$ – ו-ח. לא ניתנת.

ט. $m(x) = (x-1)^2(x-2) \quad \deg = 3$ – הפולינום האופייני הוא גם המינימלי.
י. הפיכה.

$$(3) \quad \text{א.} \begin{bmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x-1 \end{bmatrix} \quad \text{ב.} \quad p(x) = x(x-1)(x-2) \quad \text{ג.} \quad x=0, x=1, x=2$$

$x=0$ – ריבוב אלגברי : 1, $x=1$ – ריבוב אלגברי : 1, $x=2$ – ריבוב אלגברי : 1.

ד. $V_{x=0} = sp\{\langle -1, 0, 1 \rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי : 1.

$V_{x=1} = sp\{\langle 0, 1, 0 \rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי : 1.

$$\text{ה.} \quad \langle 0, 1, 0 \rangle, \langle 1, 0, 1 \rangle, \langle -1, 0, 1 \rangle \quad \text{ו. ניתנת ללכסון.} \quad \text{ז.} \quad P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ח.} \quad \begin{bmatrix} 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \end{bmatrix} \quad \text{ט.} \quad m(x) = x(x-1)(x-2) \quad \text{י. לא הפיכה.}$$

$$(4) \quad \begin{bmatrix} x+1 & -3 & 0 \\ -3 & x+1 & 0 \\ 2 & 2 & x-6 \end{bmatrix} \text{ א.} \quad \text{ב. } p(x) = (x-6)(x-2)(x+4)$$

$$\text{ג. } x=6, x=2, x=-4$$

$$-x=-4 \text{ - ריבוב אלגברי: } 1, -x=2 \text{ - ריבוב אלגברי: } 1, -x=6 \text{ - ריבוב אלגברי: } 1.$$

$$\text{ד. } V_{x=6} = sp\{\langle 0, 0, 1 \rangle\} \text{ - ריבוב גיאומטרי: } 1.$$

$$V_{x=2} = sp\{\langle 1, 1, 1 \rangle\} \text{ - ריבוב גיאומטרי: } 1.$$

$$V_{x=-4} = sp\{\langle -1, 1, 0 \rangle\} \text{ - ריבוב גיאומטרי: } 1.$$

$$\text{ה. } \langle 0, 0, 1 \rangle, \langle -1, 1, 0 \rangle, \langle 1, 1, 1 \rangle \quad \text{ו. ניתנת ללכסון.} \quad \text{ז. } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ח. } \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2^{2017} + (-4)^{2017} & 2^{2017} - (-4)^{2017} & 0 \\ 2^{2017} - (-4)^{2017} & 2^{2017} + (-4)^{2017} & 0 \\ -6^{2017} + 2^{2017} & -6^{2017} + 2^{2017} & 2 \cdot 6^{2017} \end{bmatrix}$$

$$\text{ט. } m(x) = (x-6)(x-2)(x+4) \quad \text{י. הפיכה.}$$

$$(5) \quad \text{אין פתרונות מעל } \mathbb{R}, \text{ ולכן אין ערכים עצמיים וקטורים עצמיים.}$$

$$\text{מעל } \mathbb{C}: x = 1 \pm 2i, v_{x=1+2i} = \langle 1+i, 2 \rangle, v_{x=1-2i} = \langle 1-i, 2 \rangle$$

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$$

$$(6) \quad \text{ערכים עצמיים: } x=3, \text{ וקטורים עצמיים: } v_{x=3} = \langle -1, 1 \rangle. \text{ לא ניתנת ללכסון.}$$

$$(7) \quad \text{ערכים עצמיים: } x_1=2, x_{2,3}=3$$

$$\text{וקטורים עצמיים: } v_{x=3}^{(1)} = (1, 0, 1), v_{x=3}^{(2)} = (1, 1, 0), v_{x=2} = (1, 1, 1)$$

$$(8) \quad v_{x=-2} = (-1, 1, 1), v_{x=3} = (1, 2, 1), v_{x=1} = (-1, 4, 1), x=1, x=3, x=-2$$

$$(9) \quad v_{x=-1} = (-1, 0, 1), v_{x=4} = (1, 1, 1), v_{x=1} = (1, -2, 1), x=1, x=4, x=-1$$

$$(10) \quad v_{x=3} = (1, 2), v_{x=1} = (-1, 2), x=-1, x=3$$

$$(11) \quad v_{x=1+\sqrt{3}i} = (1-\sqrt{3}i, 1+\sqrt{3}i, -2), v_{x=1} = \langle 1, 1, 1 \rangle, x=1, x=1 \pm \sqrt{3}i$$

$$v_{x=1-\sqrt{3}i} = (1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -2)$$

$$(12) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(13) \quad \text{אין כזו מטריצה.}$$